



**Некоммерческое
акционерное
общество**

**АЛМАТИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЭНЕРГЕТИКИ И
СВЯЗИ**

Кафедра радиотехники

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Сборник задач для студентов специальности
5В071900 – Радиотехника, электроника и телекоммуникации

Алматы 2014

Составители: Б.Р. Накисбекова., Суйеубаев О.Б., Теория передачи электромагнитных волн. Сборник задач для студентов специальности 5В071900 – Радиотехника, электроника и телекоммуникации. - Алматы: АУЭС, 2014. - 36с.

Сборник задач содержит краткие теоретические сведения и общие рекомендации по решению задач по дисциплине «Теория передачи электромагнитных волн» для 3-го курса, приводится список рекомендуемой литературы.

Ил .6, библиогр. - 5 назв.

Рецензент: канд.тех.наук. проф. Байкенов А.С.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2014г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2014г.

Введение

В курсе «Теория передачи электромагнитных волн» рассматривается классическая нерелятивистская электродинамика. Это частная версия теории электромагнетизма, в которой основные понятия - напряженности полей, заряды и токи - не выводятся из чего-либо, а постулируются. Кроме того, методы, которые мы будем использовать, справедливы в условиях, когда скорости движущихся тел много меньше скорости света.

Согласно основным положениям макроскопической электродинамики, электромагнитное поле (ЭМП) в каждой точке, в каждый момент времени определяется четырьмя величинами: \vec{E} - вектор напряженности электрического поля, В/м; \vec{D} - вектор электрического смещения, Кл/м²; \vec{H} - вектор напряженности магнитного поля, А/м; \vec{B} - вектор магнитной индукции, Тл. Кроме этих четырех векторов, в уравнениях электромагнитного поля присутствуют еще две величины: плотность свободного электрического заряда ρ (А/м²) и плотность электрического тока $\vec{j}_{пр}$ (тока проводимости) (Кл/м³), они характеризуют источники поля - заряды и токи.

1 Элементы векторного анализа

Цель: изучение физических полей принято использовать их математические модели – скалярные и векторные поля.

1.1 Основные теоретические сведения

Для описания физических полей принято использовать их математические модели – скалярные и векторные поля. В произвольной системе координат (x_1, x_2, x_3) скалярное поле φ приобретает вид некоторой функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, принимающей численные значения – действительные или комплексные. Векторное поле A задается тремя проекциями на единичные векторы (орты) выбранной системы координат:

$$A = A_{x_1}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{1}_{x_1} + A_{x_2}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{1}_{x_2} + A_{x_3}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{1}_{x_3}.$$

Для характеристики величины и направления скорости изменения скалярного поля в пространстве вводят градиент этого поля

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{1}_{x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{1}_{x_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{1}_{x_3}, \quad (1.1)$$

где h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Лямэ по координатам x_1, x_2 и x_3 , являющиеся коэффициентами пропорциональности между дифференциалами обобщенных координат и бесконечно малыми ребрами элементарного параллелепипеда в выбранной точке пространства.

Приведем значения коэффициентов Лямэ для наиболее употребительных координатных систем:

декартова система координат (x, y, z)

$$h_x = h_y = h_z = 1;$$

цилиндрическая система координат (r, φ, z)

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1;$$

сферическая система координат (r, ν, φ)

$$h_r = 1, \quad h_\nu = r, \quad h_\varphi = r \sin \nu;$$

Конкретно градиент вычисляют следующим образом: в декартовой системе координат

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{1}_z;$$

в цилиндрической системе координат

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{1}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{1}_z;$$

в сферической системе координат

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \nu} \mathbf{1}_\nu + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{1}_\varphi;$$

Дивергенцию векторного поля A вычисляют путем дифференцирования его проекций по определенным правилам:

в декартовой системе координат

$$\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.2)$$

в цилиндрической системе координат

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.3)$$

в сферической системе координат

$$\text{div } A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} (\sin \nu A_\nu) + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (1.4)$$

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат

$$\text{div } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_{x_3}) \right]. \quad (1.5)$$

Проекция ротора векторного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} (\text{rot } A)_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \\ (\text{rot } A)_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \\ (\text{rot } A)_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}; \end{aligned} \quad (1.6)$$

в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}(\text{rot } A)_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; \\(\text{rot } A)_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \\(\text{rot } A)_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right].\end{aligned}\tag{1.7}$$

в сферической системе координат

$$\begin{aligned}(\text{rot } A)_r &= \frac{1}{r \sin \nu} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} (\sin \nu A_\varphi) - \frac{\partial A_\nu}{\partial \varphi} \right], \\(\text{rot } A)_\nu &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right], \\(\text{rot } A)_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_\nu) - \frac{\partial A_r}{\partial \nu} \right].\end{aligned}\tag{1.8}$$

Ротор векторного поля A в произвольной системе координат выражают через проекции исходного поля и коэффициенты Лямэ:

$$\text{rot } A = [\nabla A].\tag{1.9}$$

Дифференциальные операции со скалярными и векторными полями удобно записывать с помощью оператора Гамильтона ∇ . По определению

$$\text{grad } U = \nabla U, \quad \text{div } A = \nabla A, \quad \text{rot } A = [\nabla A].\tag{1.10}$$

В декартовой системе координат оператор Гамильтона есть символический вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{1}_z.\tag{1.11}$$

Из дифференциальных векторных операций второго порядка широкое применение в электродинамике находит оператор ∇^2 , закон действия которого на векторное поле A описывается соотношением

$$\nabla^2 A = \text{grad div } A - \text{rot rot } A.\tag{1.12}$$

Дифференциальная операция второго порядка, действующая на скалярное поле, задается оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta = \text{div grad.}$$

Оператор Лапласа в различных координатных системах записывается следующим образом:

в декартовой системе координат

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad (1.13)$$

в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad (1.14)$$

в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \frac{1}{r^2 \sin v} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin v \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 v} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для графического изображения векторных полей принято строить картину их силовых линий. В каждой точке силовой линии вектор поля касателен к ней. Там, где интенсивность поля больше, силовые линии проводят чаще, и наоборот.

1.2 Пример решения типовых задач

В декартовой системе координат проекции векторного поля A постоянны в каждой точке пространства: $A_x = A_0$, $A_y = B_0$, $A_z = 0$.

Построить картину силовых линий векторного поля.

Решение. Поскольку одна из декартовых составляющих векторного поля отсутствует, силовые линии должны представлять собой семейство плоских кривых, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости xu . Вектор поля в каждой точке касателен к силовой линии, откуда вытекает дифференциальное уравнение силовых линий

$$dx/A_0 = dy/B_0, \quad (1.16)$$

являющееся следствием подобия двух прямоугольных треугольников с катетами dx , dy и A_0 , B_0 соответственно. Общий интеграл уравнения (1,16) имеет вид:

$$y = (B_0/A_0)x + C.$$

где C – произвольная постоянная.

Таким образом, силовые линии поля представляют собой однопараметрическое семейство прямых с угловым коэффициентом наклона к оси x , равным B_0/A_0 .

1.3 Задания

1.3.1 В декартовой системе координат векторное поле A имеет единственную составляющую $A_z = 3y^2$.

1.3.2 В сферической системе координат задано векторное поле $A = r1_r$.

Определить скалярное поле $\text{div } A$. Качественно построить картину силовых линий векторного поля.

Ответ: $\text{div } A = 3$.

1.3.3 В сферической системе координат векторное поле A имеет единственную r -ю составляющую, причем $A_r = f(r)$.

Какова должна быть функция $f(r)$, чтобы дивергенция поля A обращалась тождественно в нуль? Построить картину силовых линий поля.

Ответ: $f(r) = a/r^2$, где a – константа.

1.3.4 Определить дивергенцию и ротор векторного поля A , характеризуемого следующими составляющими в цилиндрической системе координат: $A_r = 10/r^2$, $A_\varphi = 0$, $A_z = 0$.

Ответ: $\text{div } A = -10/r^3$, $\text{rot } A = 0$.

1.3.5 Определить дивергенцию и ротор векторного поля A , имеющего в сферической системе координат единственную составляющую $A_\varphi = 8r \exp(10r)$.

Ответ: $\text{div } A = 0$, $\text{rot } A = 16(1-5r) \exp(-10r) 1_\varphi$.

1.3.6 Доказать следующие тождества векторного анализа (φ и A – произвольные дифференцируемые скалярное и векторное поля):

$$\text{div rot } A = 0;$$

$$\text{rot grad } \varphi = 0;$$

$$\text{rot } (\varphi A) = [\text{grad } \varphi A] + \varphi \text{rot } A;$$

$$\text{div } (\varphi A) = \text{grad } \varphi A + \varphi \text{div } A;$$

$$\text{grad } (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \text{grad } \varphi_2 + \varphi_2 \text{grad } \varphi_1.$$

1.3.7 Векторное поле A , удовлетворяющее во всех точках рассматриваемой области условию $\text{div } A = 0$, называется с о л е н о и д а л ь – н ы м (полем без источников). При выполнении условия $\text{rot } A = 0$ поле A является п о т е н ц и а л ь н ы м векторным полем. Если такое поле характеризует силу, действующую на материальную точку, то работа внешних сил при обходе замкнутого контура будет равна нулю.

В декартовой системе координат векторное поле A имеет единственную составляющую $A_y = 15x^2$.

Проверить, является ли поле: а) соленоидальным; б) потенциальным.

1.3.8 Скалярное поле φ задано в декартовой системе координат выражением

$$\varphi = 3x^2y \cos z + 2z^2.$$

Вычислить векторное поле $\text{grad } \varphi$.

Ответ: $\text{grad } \varphi = 6xy \cos z \mathbf{1}_x + 3x^2 \cos z \mathbf{1}_y + (2z - 3x^2y \sin z) \mathbf{1}_z$.

2 Статические и стационарные электромагнитные поле

Цель: изучение статические и стационарные электромагнитные поле, уравнений Максвелла.

2.1 Основные теоретические сведения

Для математического описания этого частного вида электромагнитных полей в исходной системе уравнений Максвелла (2.1) следует приравнять нулю все члены, содержащие производные по времени. В результате получаются следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0;$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho; \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_3;$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.2)$$

Точечный заряд q в вакууме характеризуется сферически симметричным распределением потенциала:

$$\varphi_3(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (2.3)$$

Если внутри ограниченной области V распределены электрические заряды с объемной плотностью ρ , то на основании принципа суперпозиции решение уравнение Пуассона запишется в виде

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{R}. \quad (2.4)$$

Здесь R – длина отрезка между точками наблюдения и интегрирования.

На точечный заряд q , помещенный в электростатическое поле \mathbf{E} , действует сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.5)$$

В частности, силу взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 , отстоящих друг от друга на расстоянии r_{12} , можно определить из закона

Кулона
$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}, \quad (2.6)$$

Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w_3 = \frac{ED}{2}, \quad (2.7)$$

Энергия, запасенная в объеме V ,

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_V EDdV. \quad (2.8)$$

2.2 Методы решения задач электростатики и магнитостатики

Наиболее прост задачи, в которых напряженность электрического поля или скалярный потенциал отыскивают по известному распределению зарядов в пространстве. Если это распределение имеет плоскую, цилиндрическую или сферическую симметрию, то задачи электростатики решают элементарно на основании интегральной формулировки третьего уравнения Максвелла, называемой законом Гаусса:

$$\oint_S DdS = Q. \quad (2.9)$$

Здесь Q – полный заряд, находящийся в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью S .

При симметричном распределении зарядов векторы E (или D) неизменны по модулю во всех точках воображаемой поверхности, имеющей ту же симметрию, что и система зарядов, порождающая электростатическое поле. Поэтому в интегралах вида подынтегральную функцию можно вынести за знак интеграла как коэффициент.

Большой общностью обладает метод, основанный на решении уравнений Пуассона и Лапласа относительно скалярного электрического потенциала. Здесь удается довести до конца решение задач о полях, обусловленных системами зарядов, не обладающих пространственной симметрией.

Между электростатикой и магнитостатикой есть много общего, однако существует и характерные различия. Если в некоторой области пространства электрические токи отсутствуют, то магнитное поле оказывается безвихревым ($\text{rot } H = 0$) и может по аналогии с (2.3) выразиться через поле скалярного магнитного потенциала φ_M :

$$H = - \text{grad } \varphi_M. \quad (2.10)$$

В однородной среде ($\mu_a = \text{const}$) потенциал φ_M удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (2.11)$$

Специфической особенностью задач магнитостатики является неоднозначный характер решения по методу скалярного магнитного

потенциала для многосвязанных областей, топологически сцепленных с контуром тока [5].

Другой подход к задачам магнитостатики связан с понятием *векторного электрического потенциала* A_3 , через который вектор магнитной индукции выражается таким образом:

$$B = \text{rot } A_3. \quad (2.12)$$

При этом четвертое уравнение Максвелла $\text{div } B=0$ удовлетворяется автоматически. Часто удобно полагать, что

$$\text{div } A_3 = 0. \quad (2.13)$$

При этом потенциал A_3 должен являться решением векторного уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 A_3 = -\mu_a J_3. \quad (2.14)$$

Если токи сосредоточены внутри некоторого ограниченного объема V , то по аналогии с (3.10) можно записать

$$A_3 = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{J_3 dV}{R}. \quad (2.15)$$

Если конкретная задача магнитостатики обладает цилиндрической симметрией, то напряженность магнитного поля оказывается постоянной на круговом контуре, центр которого лежит на оси симметрии. Примером может служить задача о магнитном поле бесконечного прямолинейного проводника, для которой решение получается элементарными средствами на основании закона полного тока

$$\oint_L H dl = I_\Sigma, \quad (2.16)$$

если известен полный ток I_Σ , охватываемый замкнутым контуром L .

Магнитным потоком Φ , пронизывающим поверхность, называется интеграл

$$\Phi = \int_S B dS. \quad (2.17)$$

Если некоторый проводящий контур (например, проволочный виток) сцеплен с магнитным потоком Φ , который возникает под действием тока I , протекающего по этому же контуру, то *коэффициент самоиндукции* (индуктивность) системы

$$L = \Phi / I. \quad (2.18)$$

В случае, когда имеется катушка с N витками, в рассмотрение вводится *потокосцепление*

$$\Psi = N\Phi. \quad (2.19)$$

При этом индуктивность катушки

$$\Delta = \Psi / I. \quad (2.20)$$

2.3 Пример решения типовых задач

На отрезке прямой линии длиной $2l$ равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ_q Кл/м.

Определить закон изменения скалярного электрического потенциала во всем пространстве.

Решение. Введем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось z совпала с отрезком, на котором распределены заряды, а начало координат — с серединой отрезка. Каждый элемент длины на интервале $(-l, +l)$ несет заряд $dq = \tau_q dz$. Если координата элемента длины $z = \zeta$, то в точке наблюдения (r, z) потенциал поля от элементарного заряда.

Используя принцип суперпозиции, получаем суммарный потенциал в точке наблюдения

$$\varphi_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{R}.$$

По таблицам интегралов [5] находим окончательный ответ:

здесь введены безразмерные параметры $A = r/l$, $B = z/l$.

2.4 Задания

2.4.1 Заряженный металлический шар радиусом 5 см находится в воздухе. Известно, что электрический пробой в воздухе наступает при напряженности поля 30 кВ/см.

Определить предельно допустимый заряд шара, обеспечивающий отсутствие пробоя.

Ответ: $8,3 \cdot 10^{-7}$ Кл.

2.4.2 Имеются два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами $a = 2$ см и $b = 5$ см, выполненные из металла. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Потенциал внутреннего цилиндра составляет 5 В, потенциал наружного цилиндра равен нулю.

Определить напряженность электрического поля на окружности $r=4$ см.

Ответ: 136 В/м.

2.4.3 Проводятся испытания на электрический пробой коаксиальной линии передачи, образованной двумя цилиндрами с радиусами a и b ($a < b$).

Было обнаружено, что пробой в системе наступает при разности потенциалов между цилиндрами, равной U_0 . Затем радиус внутреннего цилиндра был сокращен вдвое.

Определить, при какой разности потенциалов наступит пробой в новой системе.

$$\text{Ответ: } U = U_0 \left[\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + 1 \right].$$

2.4.4 Бесконечная металлическая плоскость заряжена с поверхностной плотностью $4 \cdot 10^{-12}$ Кл/м².

Найти величины полей D и E во всем пространстве, предполагая, что абсолютная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_a = \epsilon_0$.

Ответ: $D = \pm 2 * 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$, $E = \pm 0,226 \text{ В/м}$ (знак зависит от того, в каком из полупространств находится точка наблюдения).

2.4.5 По бесконечному цилиндрическому проводнику радиусом a протекает постоянный ток с плотностью J .

Определить напряженность магнитного поля внутри и вне проводника.

Ответ:

$$H_\varphi = \begin{cases} \frac{Jr}{2} & (r \leq a), \\ \frac{Ja^2}{2r} & (r > a). \end{cases}$$

2.4.6 Решить предыдущую задачу, предположив, что плотность тока изменяется по закону $J = J_0 r/a$.

Ответ:

$$H_\varphi = \begin{cases} \frac{J_0 r^2}{(3a)} & (r \leq a), \\ \frac{J_0 a^2}{3r} & (r > a). \end{cases}$$

3 Плоские электромагнитные волны

Цель: изучение плоские электромагнитные волны

3.1 Основные теоретические сведения

Плоские электромагнитные волны существуют в однородных безграничных средах. В случае полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, комплексные амплитуды \dot{E} и \dot{H} удовлетворяют уравнением Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{E} + \gamma^2 \dot{E} = 0, \tag{3.1}$$

$$\nabla^2 \dot{H} + \gamma^2 \dot{H} = 0,$$

где $\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a} = \beta - j\alpha$ – комплексный коэффициент распространения;
 β – коэффициент фазы, или волновое число;
 α – коэффициент ослабления.

Так как исходные уравнения Максвелла дают однозначную связь между E и H , достаточно найти решение лишь одного из этих уравнений.

Если величины ϵ_a и μ_a известны, то β и α можно найти с помощью выражения для корня квадратного из комплексного числа:

$$\sqrt{a \pm jb} = \pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm j \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа; квадратные корни $\sqrt{r+a}$ и $\sqrt{r-a}$ следует считать положительными.

На высоких частотах магнитные свойства большинства сред выражены слабо. Поэтому с достаточной для практических целей степенью точности можно считать

$$\mu_a = \mu_0.$$

Поскольку

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a = \epsilon\epsilon_0(1 - jt g\delta_3),$$

комплексный коэффициент распространения

$$\gamma = \beta - j\alpha = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'_a} \sqrt{1 - jt g\delta_3}. \quad (3.2)$$

Коэффициент фазы β характеризует изменение фазы гармонических колебаний при распространении волны. Расстояние, на котором фаза изменяется на 2π рад, называется *длиной волны*:

$$\lambda = 2\pi/\beta.$$

Плоскость равных фаз называется *фазовым фронтом волны*, а скорость перемещения этой плоскости – *фазовой скоростью*:

$$v_\phi = \omega/\beta. \quad (3.3)$$

Коэффициент фазы и коэффициент ослабления могут быть выражены следующими формулами:

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + tg^2 \delta_3}}{2} \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \left(\frac{\sqrt{1 + tg^2 \delta_3} - 1}{2} \right)^{1/2}. \quad (3.5)$$

Таким образом, между нами существует соотношение

$$\alpha = \beta \operatorname{tg}(\delta_3/2).$$

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{\varepsilon}(1 + \sqrt{1 + tg^2 \delta_3})^{1/2}}, \quad (3.6)$$

длина волны

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}(1 + \sqrt{1 + tg^2 \delta_3})^{1/2}}. \quad (3.7)$$

Отношение фазовой скорости в среде к скорости света называют *коэффициентом преломления*:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Из уравнений Максвелла следует, что в случае плоской волны комплексные амплитуды векторов E и H связаны *характеристическим сопротивлением среды*:

$$Z_c = \frac{\omega\mu_a}{\gamma} = \sqrt{\tilde{\mu}_a/\varepsilon_a}, \quad (3.8)$$

так что

$$E = Z_c \dot{H}.$$

Характеристическое сопротивление для немагнитных сред ($\mu_a = \mu_0$)

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} (1 - jtg\delta_3)^{-1/2} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + tg^2 \delta_3)^{-1/4} e^{j\frac{\delta_3}{2}} \text{ Ом.}$$

Аргумент принимает значения от нуля (диэлектрики без потерь) до $\pi/4$ (идеальный металл).

Характеристическое сопротивление для вакуума

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 376,991 \text{ Ом.}$$

Векторные уравнения (5.1) означают, что любая координатная составляющая векторов поля удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \dot{U} + \gamma^2 U = 0,$$

имеющему в декартовой системе координат частное решение

$$U = C \exp[-j\gamma(\dot{N}_x x + \dot{N}_y y + \dot{N}_z z)]. \quad (3.9)$$

Здесь C – константа; $\dot{N}_x, \dot{N}_y, \dot{N}_z$ – комплексные постоянные, удовлетворяющие условию

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = 1. \quad (3.10)$$

Если N_x^2, N_y^2, N_z^2 – вещественные числа, то выражение (3.9) описывает *однородную плоскую волну*, распространяющуюся в произвольном направлении относительно исходной системы координат. Эту волну удобно выразить формулой

$$\dot{U} = C \exp[-j\gamma(\dot{N}r)]. \quad (3.11)$$

Плоская волна переносит энергию в направлении распространения. Для гармонических полей этот процесс описывается средним значением вектора Пойнтинга:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{E}\dot{H}]. \quad (3.12)$$

Часто $P_{\text{ср}}$ удобно выражать только через напряженность электрического или магнитного поля:

$$P_{\text{ср}} = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \text{Re}\left(\frac{1}{Z_c}\right) I_z = \frac{|\dot{H}|^2}{2} \text{Re}(Z_c) I_z. \quad (3.13)$$

В средах без потерь $P_{\text{ср}}$ не зависит от координаты z . Если же среда обладает потерями, то плотность потока мощности плоской электромагнитной волны убывает при распространении по экспоненциальному закону:

$$P_{\text{ср}} = P_{\text{ср}}(0) \exp(-2\alpha z). \quad (3.14)$$

Величину потерь в среде характеризуют *погонным затуханием* Δ в дБ/м:

$$\Delta = 20 \lg \left[\frac{E(0)}{E(1)} \right] = 10 \lg \left[\frac{\Pi(0)}{\Pi(1)} \right],$$

связанным с коэффициентом ослабления α соотношением $\Delta = 8,69\alpha$.

3.2 Пример решения типовых задач

Плоская электромагнитная волна с частотой 10^9 Гц распространяется в среде с параметрами $\varepsilon = 2,4$, $\operatorname{tg} \delta_3 = 10^{-1}$, $\mu = 1$.

Определить фазовую скорость, длину волны и коэффициент ослабления.

Решение. Учтем, что $\operatorname{tg} \delta_3 \ll 1$ и разложим выражение (5.3) в степенной ряд. Ограничиваясь тремя первыми членами, получим в степенной ряд. Ограничиваясь тремя первыми членами, получим

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_3} \approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \left(1 - j \frac{\operatorname{tg} \delta_3}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_3}{8} \right).$$

Таким образом, для диэлектриков с малыми потерями коэффициент фазы и коэффициент ослабления приближенно равны:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} (1 + 0,125 \operatorname{tg}^2 \delta_3),$$

$$\alpha = 0,5 \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \operatorname{tg} \delta_3.$$

Используя соотношение (5.4), найдем фазовую скорость волны

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon} (1 + 0,125 \operatorname{tg}^2 \delta_3)}$$

Полученный результат показывает, что наличие потерь в среде приводит к изменению величины фазовой скорости. Для $\operatorname{tg} \delta_3 = 10^{-1}$ поправка составляет 0,125%, так что практически можно положить

$$v_\phi \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = 1,94 * 10^8 \text{ м/с.}$$

По известной величине фазовой скорости найдем длину волны:

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f} = 0,194 \text{ м.}$$

Подстановка исходных данных в полученную ранее формулу дает:

$$\alpha = 1,622 \text{ м}^{-1}.$$

3.3 Задание

3.3.1 Характеристическое сопротивление среды равно 1508 Ом, относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$.

Определить относительную магнитную проницаемость среды.

Ответ: 16.

3.3.2 В среде с параметрами $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ распространяется плоская электромагнитная волна, комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля которой в плоскости

$$z = 0 \quad E = 0.5 \mathbf{1}_x + 0.2 \mathbf{1}_y.$$

Определить комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, если волна распространяется в направлении возрастания координаты z .

Ответ: $\dot{H} = (-1.061 \mathbf{1}_x + 2.65 \mathbf{1}_y) 10^{-3} \text{ А/м.}$

3.3.3 Определить толщину медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в 10^4 раза на частотах 50 Гц, и 5 МГц.

Ответ: 9,271 см, 29,374 мкм.

3.3.4 Определить толщину экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в 10^4 раза на частоте 50 Гц, если он выполнен из материала с $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ и $\mu = 900$. Сравнить полученный результат с ответом к предыдущей задаче.

Ответ: 3,09 мм.

3.3.5 В среде с параметрами $\varepsilon = 2,25$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрического поля 100 В/м.

Определить плотность потока мощности, переносимой волной в направлении распространения.

Ответ: 19,894 Вт/м².

3.3.6 Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с параметрами $\varepsilon = 144$, $\mu = 1$, $\text{tg } \delta_3 = 0.6$, определить плотность потока мощности в плоскости $z = 0$ на частоте 10 ГГц, если амплитуда напряженности электрического поля в этой плоскости равна 100 В/м.

Ответ: 165 Вт/м².

3.3.7. Вычислить фазовую скорость, коэффициент ослабления и глубину проникновения поля для плоской электромагнитной волны с частотой 10 МГц, распространяющейся в металле с параметрами $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu = 1$.

Ответ: $d = 22,5 \text{ мкм.}$

3.3.8. Плоская электромагнитная волна с частотой 10^9 Гц распространяется в среде с параметрами $\varepsilon = 2,25$, $\text{tg } \delta_3 = 0,01$, $\mu = 1$. Амплитуда электрического поля в плоскости $z = 0$ равна 100 В/м

Определить среднюю плотность потока мощности в плоскости $z = 1 \text{ м.}$

Ответ: $P_{cp}(z = 1) = 14,38 \text{ Вт/м}^2.$

4 Отражение и преломление плоских электромагнитных волн

Цель: изучение отражение и преломление плоских электромагнитных волн.

4.1 Основные теоретические сведения

Комплексные амплитуды этих волн связаны с комплексной амплитудой падающей волны *коэффициентами отражения*

$$\dot{R}_E = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}, \quad \dot{R}_H = \dot{H}_{\text{отр}} + \dot{H}_{\text{пад}}.$$

и *коэффициентами преломления* (прохождения)

$$\dot{T}_H = \dot{H}_{\text{пр}} / \dot{H}_{\text{пад}}.$$

Могут быть также введены коэффициенты отражения и преломления для среднего значения плотности потока мощности:

$$R_{\Pi} = \frac{\Pi_{\text{отр}}}{\Pi_{\text{пад}}}, \quad T_{\Pi} = \Pi_{\text{пад}}.$$

Если вектор Пойнтинга падающей волны перпендикулярен границе раздела, то:

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad (4.1)$$

$$\dot{T}_E = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}. \quad (4.2)$$

Из граничных условий следует, что углы падения φ , отражения φ_0 и преломления φ_{Π} связаны законом зеркального отражения

$$\varphi = \varphi_0$$

и законом Снелля

$$\sin \varphi / \sin \varphi_{\Pi} = \beta_2 / \beta_1, \quad (4.3)$$

где индекс 1 относится к среде, содержащей падающую волну.

С учетом выражения для коэффициента фазы β (4.3) можно представить в виде

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{\Pi}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}.$$

Коэффициенты отражения R и преломления T для заданного значения угла падения зависят от ориентации векторов электромагнитного поля по отношению к плоскости падения. Если вектор E лежит в этой плоскости, то

$$R''_E = \frac{Z_{C2} \cos \varphi_{\Pi} - Z_{C1} \cos \varphi}{Z_{C2} \cos \varphi_{\Pi} + Z_{C1} \cos \varphi} \quad (4.4)$$

$$T''_E = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{Z_{C2} \cos \varphi_{\Pi} + Z_{C1} \cos \varphi} \quad (4.5)$$

Если вектор E перпендикулярен плоскости падения, то коэффициенты отражения и преломления выражаются соотношениями

$$R_{\hat{E}} = \frac{Z_{C2} \cos \varphi - Z_{C1} \cos \varphi_{\Pi}}{Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_{\Pi}} \quad (4.6)$$

$$T_{\hat{E}} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_{\Pi}} \quad (4.7)$$

Выражения (4.4) – (4.7) при стремлении φ к нулю переходят в (4.1) и (4.2) независимо от ориентации вектора E по отношению к плоскости падения. Это связано с тем, что при $\varphi = 0$ понятие плоскости падения теряет смысл. Для диэлектрических сред, у которых $\mu = 1$, коэффициенты R и T удобно представить в более компактной форме:

$$R_{\hat{E}} = -\frac{\sin(\varphi - \varphi_{\Pi})}{\sin(\varphi + \varphi_{\Pi})}; \quad (4.8)$$

$$R''_E = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_{\Pi})}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_{\Pi})}; \quad (4.9)$$

$$T_{\hat{E}} = \frac{2 \sin \varphi_{\Pi} \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_{\Pi})}; \quad (4.10)$$

$$T''_E = \frac{2 \sin \varphi_{\Pi} \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_{\Pi}) \cos(\varphi - \varphi_{\Pi})}. \quad (4.11)$$

Угол падения, при котором наблюдается такое явление, называют *углом Брюстера*. Значение угла Брюстера для немагнитных сред находят из соотношения

$$\operatorname{tg} \delta_3 = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}. \quad (4.12)$$

Согласно равенству (6.3) при $\varepsilon_2\mu_2 < \varepsilon_1\mu_1$ угол преломления больше угла падения, поэтому если

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}.$$

4.2 Пример решения типовых задач

Измерения комплексного коэффициента отражения \dot{R}_E от диэлектрика с неизвестными параметрами ε и μ на частоте 1 ГГц дали величину $\dot{R}_E = -0,5e^{-j0,09}$.

Определить параметры диэлектрика $\varepsilon, tg\delta_3, \sigma$, если известно, что $\mu = 1$. Падение волны считать нормальным.

Решение. Комплексный коэффициент отражения от границы раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами

$$\mu = 1, \dot{\varepsilon}_a = \varepsilon\varepsilon_0(1 - jtg\delta_3),$$

$$\dot{R}_E = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}(1 - jtg\delta_3)^{1/2}}{1 + \sqrt{\varepsilon}(1 - jtg\delta_3)^{1/2}},$$

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 + tg^2\delta_3} e^{-j\pi/2}.$$

Подставляя в это выражение $\dot{R}_E = -|\dot{R}|e^{-j\psi}$ и приравнивая фазы и модули обеих частей, получим

$$\frac{\delta_3}{2} = -\arctg \left(\frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 + |\dot{R}| \cos \psi} \right) + \arctg \left(\frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 - |\dot{R}| \cos \psi} \right),$$

$$\varepsilon \sqrt{1 + tg^2\delta_3} = \frac{1 + |\dot{R}|^2 + 2|\dot{R}| \cos \psi}{1 + |\dot{R}|^2 - 2|\dot{R}| \cos \psi}.$$

Производя вычисления, найдем

$$tg\delta_3 = 0,12, \varepsilon = 9,0, \sigma = 0,06 \text{ См/м.}$$

4.3 Задание

4.3.1 Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и идеальным металлом. Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны 0,1 В/м.

Определить комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в вакууме на границе раздела, если вектор напряженности электрического поля падающей волны направлен по оси x декартовой системы координат с осью z , направленной перпендикулярно границе раздела в глубь металла. Записать выражения для мгновенных значений напряженностей электрического и магнитного полей в вакууме.

Ответ:

$$\dot{E}_{\text{отр}} = -0,1 \mathbf{1}_x \text{ В/м};$$

$$\dot{H}_{\text{отр}} = 0,2651 \mathbf{1}_y \text{ мА/м};$$

$$E(t, z) = 0.2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} z\right) \sin \omega t \mathbf{1}_x \text{ В/м};$$

$$H(t, z) = 0.53 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} z\right) \cos \omega t \mathbf{1}_y \text{ мА/м}.$$

4.3.2 Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и металлом с удельной электрической проводимостью $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ СМ/м}$.

Определить коэффициент отражения по электрическому полю на частоте 10 ГГц, если $\mu_a = \mu_0$.

Ответ: $R_E = -1 + 1.36 \cdot 10^{-4}(1+j)$.

4.3.3 Плоская электромагнитная волна с частотой 10 МГц и средним значением плотности потока мощности 1 Вт/м падает нормально из вакуума на поверхность металла с удельной электрической проводимостью $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ СМ/м}$.

Определить напряженность электрического поля и среднее значение плотности потока мощности в металле непосредственно у границы раздела.

Ответ: $1,185 \cdot 10^{-4} (1+j) \text{ В/м}$, $8,6 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2$.

4.3.4 Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$.

Определить среднее значение плотности потока мощности в диэлектрике, если среднее значение потока мощности падающей волны 1 Вт/м.

Ответ: $8/9 \text{ Вт/м}^2$.

4.3.5 Используя эквивалентную схему в виде отрезков линии передачи, вывести формулу для коэффициента отражения по электрическому полю от диэлектрической пластины толщиной d и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\text{пл}}$ при нормальном падении плоской электромагнитной волны с заданной частотой. Потерями в пластине пренебречь. Вычислить коэффициент отражения для $\varepsilon_{\text{пл}} = 2,4$ на длинах волн $\lambda_{01} = 3,1 \text{ см}$ и $\lambda_{02} = 6,2 \text{ см}$, $d = 0,5 \text{ см}$.

Указание: воспользоваться формулой для входного сопротивления отрезка линии длиной d , нагруженного на сопротивление Z_0 .

$$\text{Ответ: } \dot{R}_E = j \frac{(1 - \varepsilon_{\text{пл}}) \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}} d \right)}{2 \sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}} + j(1 + \varepsilon_{\text{пл}}) \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}} d \right)},$$

$$\dot{R}_{E1} = -0.412, \quad \dot{R}_{E2} = -j0.412 / (0.9118 + j).$$

4.3.6 Используя результат задачи 6.12, вычислить коэффициент преломления поля пластины керамики титанат бария (BaTiO_3) на частоте 10 ГГц, если $\varepsilon = 144$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta_3 = 0.6$, $d = 0,1$ мм.

$$\text{Ответ: } \dot{T}_E = \frac{2}{2 \operatorname{ch} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}} d \right) + j \frac{|\varepsilon_{\text{пл}}| - 1}{\sqrt{|\varepsilon_{\text{пл}}|}} \operatorname{sh} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}} d \right)},$$

$$T_E = 0,244.$$

4.3.7 Для условий задачи 6.16 определить направление переноса энергии, ориентацию и скорость движения фазового фронта v_ϕ . Вычислить v_ϕ для $\varphi = 45^\circ$.

Ответ: энергия переносится вдоль оси x , так как

$$P_{\text{ср}} = 2 \dot{E}_{\text{пад}} \dot{H}_{\text{пад}} \sin \varphi \sin^2 (\beta z \cos \varphi) \mathbf{1}_x \text{ Вт/м}^2,$$

фазовый фронт перпендикулярен границе раздела и движется со скоростью

$$v_\phi = c / \sin \varphi = \sqrt{2} c.$$

4.3.8 Плоская электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля которой лежит в плоскости падения, падает на вакуума на поверхность диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_a = \varepsilon \varepsilon_0$ ($\mu = 1$, $\sigma = 0$) под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon}$.

Найти соотношение между векторами Пойнтинга падающей и прошедшей волн. Обсудить полученный результат с точки зрения закона сохранения энергии.

$$\text{Ответ: } P_{\text{пр}} = P_{\text{пад}} / \sqrt{\varepsilon}.$$

4.3.9 Плоская электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля которой лежит в плоскости падения, падает из диэлектрика с параметрами $\mu = 1$, $\varepsilon_1 = 9$, $\sigma_1 = 0$ на поверхность диэлектрика с параметрами $\mu_2 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\sigma_2 = 0$.

При каких углах падения: а) вся энергия падающей волны переходит во вторую среду; б) вся энергия падающей волны отражается от границы раздела?

$$\text{Ответ: а) } 18^\circ 25', \text{ б) } > 19^\circ 30'.$$

4.3.10 Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума на поверхность плавленого кварца.

Определить угол падения, при котором осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную.

$$\text{Ответ: } 62^\circ 50'.$$

4.3.11 Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума под углом φ на границу раздела со средой, показатель преломления которой равен 1,531.

Найти вид поляризации отраженной волны для углов падения 0° , 45° , $56^\circ 51'$.

Ответ: $\varphi=0^\circ$ - поляризация круговая, $\varphi=45^\circ$ - поляризация эллиптическая с соотношением осей 3,177, $\varphi=56^\circ 51'$ – поляризация линейная с вектором H , лежащим в плоскости падения.

5 Волноводы

Цель: изучение прямоугольного и круглого волноводы.

5.1 Основные теоретические сведения

Волновод представляет собой полую металлическую трубу произвольного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны. Наиболее часто применяют волноводы прямоугольного

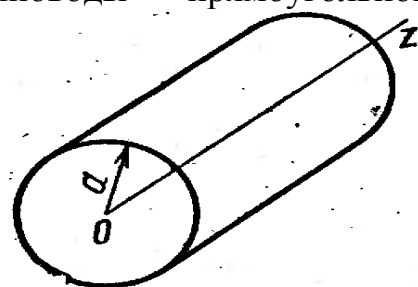
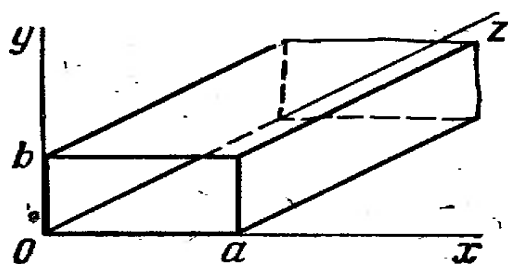


Рисунок 5.1 – Прямоугольного и круглого волноводы

и круглого сечений, реже – волноводы более сложного сечения, например, П-образные и Н-образные.

Предположим, что волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Каждый конкретный тип волны в волноводе может распространяться в том случае, если

$$\lambda_0 / \sqrt{\epsilon} < \lambda_{кр}, \quad (5.1)$$

где λ_0 – длина волны генератора;

$\lambda_{кр}$ – критическая длина волны, которая определяется размерами и формами поперечного сечения волновода.

Для волны типа E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном волноводе

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \quad (5.2)$$

где a – радиус волновода;

u_{mn} – n -й корень уравнения $J_m(x) = 0$.

Для волны типа H_{mn} в круглом волноводе

$$\lambda_{кр} = 2\pi a / \mu_{mn} \quad (5.3)$$

где μ_{mn} – n -й корень уравнения $J_m(x) = 0$.

Значение корней u_{mn} и μ_{mn} приведены в Приложении I.

Фазовая скорость волны в волноводе определяется величиной продольного волнового числа:

$$h = \sqrt{\beta^2 \varepsilon - g^2}, \quad (5.4)$$

где $\beta = 2\pi/\lambda_0$; $g = 2\pi/\lambda_{кр}$ – поперечное волновое число.

Если выполняется условие (7.1), $\beta^2 \varepsilon > g^2$, значение h действительное и данный тип волны распространяется. Если условие (5.1) не выполняется, то $\beta^2 \varepsilon < g^2$, значение h мнимое и данный тип волны затухает, не распространяясь. В этом случае формула (5.4) позволяет определить коэффициент ослабления волны.

Для нахождения фазовой скорости и длины волны в волноводе можно воспользоваться соотношением

$$h = \frac{2\pi}{\lambda_{в}} = \omega / v_{\phi}, \quad (5.5)$$

где $\lambda_{в}$ – длина волны в волноводе.

Из (5.5) получаем расчетные формулы для фазовой скорости, длины волны и групповой скорости.

Фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (5.6)$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_B = \frac{\lambda_0 / \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (5.7)$$

Групповая скорость

$$v_{гр} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}. \quad (5.8)$$

где c – скорость света в свободном пространстве.

Решая уравнения Гельмгольца, можно получить следующие выражения для составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей волн типа E_{mn} в прямоугольном волноводе:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -j \frac{h\pi m}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_y &= -j \frac{h\pi n}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_x &= j\omega\varepsilon_a \frac{\pi n}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_y &= -j\omega\varepsilon_a \frac{\pi m}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Низшей из волн электрического типа является волна E_{11} . Картина силовых линий поля волны E_{11} изображена на рисунке 5.2.

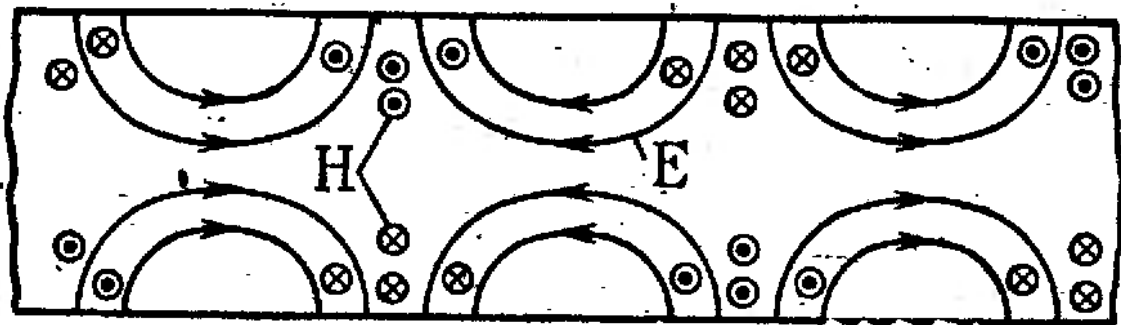


Рисунок 5.2 - Картина силовых линий поля волны E_{11}

Выражения для составляющих векторов напряженностей полей волн типа H_{mn} в прямоугольном волноводе записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= j\omega\mu_a \frac{\pi n}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a \frac{\pi m}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= 0; \\ \dot{H}_x &= j \frac{h\pi m}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_y &= j \frac{h\pi n}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

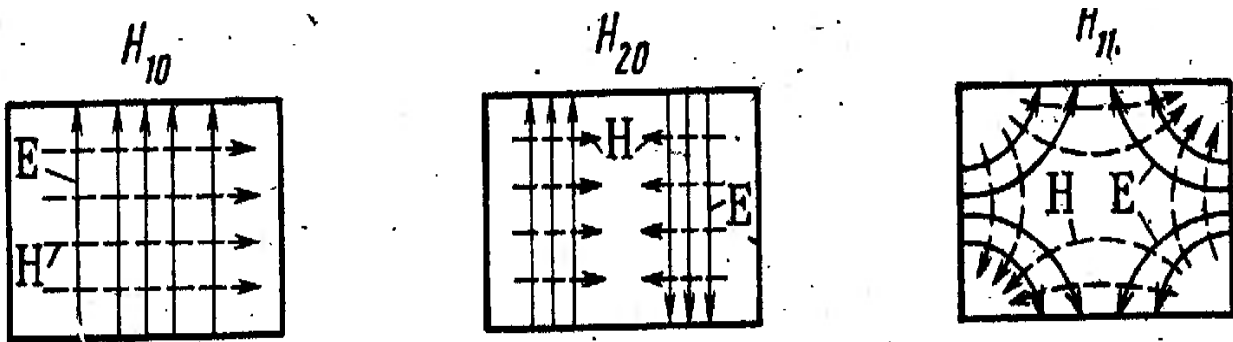


Рисунок 5.3 - Картина силовых линий поля простейших волн

Низшей среди волн электрического типа в круглом волноводе является волна E_{01} , для которой $\lambda_{кр} = 2,613a$, ближайшим высшим типом – волна E_{11} . Картина силовых линий поля волн типа E_{01} и E_{11} изображена на рисунке 5.4.

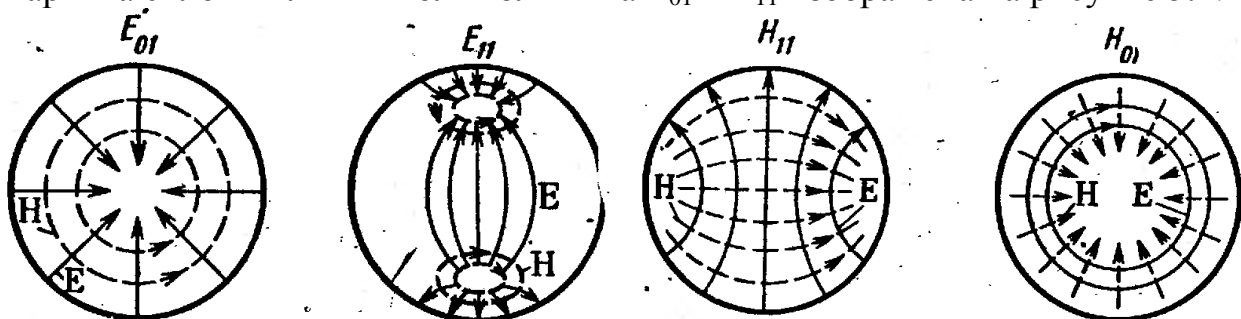


Рисунок 5.4 - Картина силовых линий

Характеристическим сопротивлением Z_c волновода называется отношение поперечных составляющих векторов E и H . Для волн электрического типа

$$Z_{cE} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (5.11)$$

Для волн магнитного типа

$$Z_{cH} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad (5.12)$$

где Z_0 – характеристическое сопротивление плоской волны в свободном пространстве.

5.2 Пример решения типовых задач

Какие типы волн могут распространяться в круглом волноводе диаметром 3 см, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon = 3,2$? Частота колебаний 10 ГГц.

Решение. В данном волноводе могут распространяться лишь те типы волн, для которых выполняется условие $\lambda_d < \lambda_{кр}$, где $\lambda_d = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon} = c / f \sqrt{\varepsilon}$ – длина волны в однородном безграничном диэлектрике. В нашем случае $\lambda_d = 1,675$ см. Критическая длина волны в круглом волноводе равна $2\pi a / \nu_{mn}$ для волн типа E_{mn} и $2\pi a / \mu_{mn}$ для волн типа H_{mn} . Следовательно, для распространяющихся типов волн должны выполняться условия $\nu_{mn} < 2\pi a / \lambda_d$, $\mu_{mn} < 2\pi a / \lambda_d$, $2\pi a / \lambda_d = 5,627$, которым удовлетворяют следующие типы волн: E_{01} , E_{02} , E_{11} , E_{21} , H_{01} , H_{11} , H_{12} , H_{21} , H_{31} , H_{41} .

5.3 Задание

5.3.1 Какие типы волн могут распространяться в квадратном волноводе со стороной 1 см при частоте 10 ГГц? Волновод заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon = 2,6$.

Ответ: H_{10} , H_{20} , H_{01} , H_{02} , H_{11} , E_{11} .

5.3.2 Какие типы волн могут распространяться в квадратном волноводе диаметром 3 см при частоте 7,5 ГГц?

Ответ: E_{01} , E_{11} , H_{01} , H_{11} , H_{21} , H_{31} .

5.3.3 Прямоугольный волновод сечением 23 x 10 мм заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon = 2,25$. Частота колебаний 8,4 ГГц.

Определитель величины v_{ϕ} и $\lambda_{в}$.

Ответ: $2,34 \cdot 10^8$ м/с, 2,78 см.

5.3.4 Определить критическую длину волны, критическую частоту и длину волны в прямоугольном волноводе для волны типа E_{11} . Размеры поперечного сечения 4 x 3 см. Частота колебаний 10 ГГц.

Ответ: 4,8 см, 6,25 ГГц, 3,84 см.

5.3.5 Определить критическую частоту и фазовую скорость волны в круглом волноводе диаметром 5 см при частоте 5 ГГц.

Ответ: 3,516 ГГц, $4,219 \cdot 10^8$ м/с.

5.3.6. Определить диапазон частот, в пределах которого в круглом волноводе диаметром 4 см может распространяться только основной тип волны.

Ответ: 4,395-5,470 ГГц.

5.3.7. Вычислить размеры поперечного сечения квадратного волновода, если известно, что фазовая скорость волны типа E_{11} равна $6 \cdot 10^8$ м/с. Частота передаваемых колебаний 5 ГГц.

Ответ: 4,9 x 4,9 см.

5.3.8. В волноводе, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon=2.25$, распространяется волна с фазовой скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с. Определить групповую скорость.

Ответ: $1,333 \cdot 10^8$ м/с.

5.3.9. В круглом волноводе диаметром 5 см, заполненном диэлектриком, распространяется волна типа H_{11} . Частота колебаний 3 ГГц.

Определить диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего волновод, если фазовая скорость волны равна скорости света в свободном пространстве.

Ответ: $\varepsilon=2.37$.

6 Объемный резонатор

Цель: изучение объемные резонаторы.

6.1 Основные теоретические сведения.

Объемный резонатор представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой существуют электромагнитные колебания.

Прямоугольный объемный резонатор. Резонансная частота колебаний типа H_{nmp} или E_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \quad (6.1)$$

где a, b, l – геометрические размеры резонатора (см. рисунок 10.1).

Составляющие векторов поля для колебаний типа H_{mnp} :

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= j\omega\mu_a C \frac{\pi n}{b} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right); \\ \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a C \frac{\pi m}{a} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right); \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\dot{E}_z = 0;$$

$$\dot{H}_x = -C \frac{\pi m}{a} \frac{\pi p}{l} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right);$$

$$\dot{H}_y = C \frac{\pi n}{b} \frac{\pi p}{l} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right);$$

$$\dot{H}_z = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] C \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right);$$

где C – производный амплитудный множитель.

Цилиндрический объемный резонатор.

Резонансная частота колебаний типа H_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2}, \quad (6.3)$$

где ε_a, μ_a – абсолютные диэлектрические проницаемости вещества, заполняющего резонатор;

μ_{mn} – n -й корень уравнения $J'_m(x) = 0$.

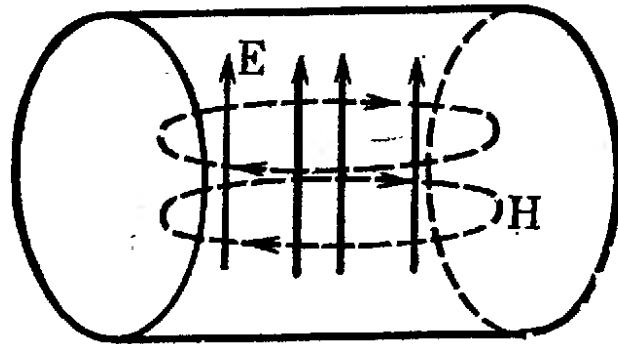


Рисунок 6.1 – Силовых линии поля

Основным колебанием типа Н в цилиндрическом резонаторе является H_{111} , картина силовых линий поля которого изображена на рисунок 6.1

Резонансная частота колебаний типа E_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \quad (6.4)$$

где v_{mn} – n -й корень функции Бесселя $J_m(x)$.

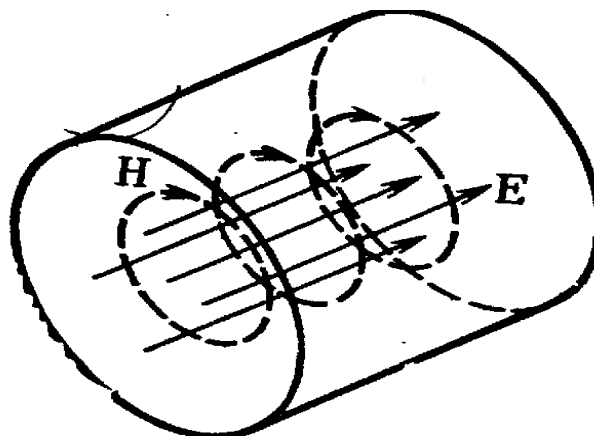


Рисунок 6.2 - Силовых линии поля

В отличие от колебаний типа Н индекс p здесь может принимать нулевое значение.

Основным колебанием типа Е в цилиндрическом резонаторе является E_{010} , картина силовых линий поля которого изображена на рисунок 10.7.

Особенностью этого колебания является то, что его резонансная частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \frac{2,4048}{a}, \quad (6.5)$$

не зависит от длины резонатора.

В общем случае, когда резонатор представляет собой закороченный с обоих концов отрезок произвольного волновода, резонансную длину волны определяют из условия

$$l = p \frac{\lambda_{\text{в}}}{2}, \quad (6.6)$$

где p – целое число (продольный индекс);

$\lambda_{\text{в}}$ – длина волны в волноводе (линии передачи).

Из выражения (6.6) получается формула для резонансной частоты:

$$\omega_p = \frac{\pi p v_{\phi}}{l}, \quad (6.7)$$

где v_{ϕ} – фазовая скорость волны в линии передачи, на базе которой выполнен резонатор.

В частности, для основного колебания типа T_1 объемного резонатора представляющего собой закороченный с обоих концов отрезок коаксиальной линии передачи (см. рисунок 10.3),

$$\omega_p = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a l}}. \quad (6.8)$$

Если линию передачи свернуть в кольцо, то образуется резонатор бегущей волны. Резонанс здесь наблюдается при условии, что длина резонатора l равна целому числу длин волн в линии, откуда

$$\omega_p = n \frac{2v_{\phi}}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.9)$$

Среднюю часть резонатора, образованную двумя параллельными дисками, рассматривают как конденсатор с емкостью

$$C = \varepsilon_a \frac{\pi a^2}{d}. \quad (6.10)$$

Параллельно ему включена индуктивность L , образованная стенками резонатора. Для резонатора, изображенного на рисунок 10.4,

$$L = \frac{\mu_a h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (6.11)$$

где h – высота зазора.

Таким образом, считается, что квазистационарный торовидный резонатор эквивалентен колебательному контуру с резонансной частотой

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0 h a^2}{z d} \ln \frac{b}{a}}}, \quad (6.10)$$

Энергия, запасенная в объемном резонаторе любого типа:

$$W = \int_V \varepsilon_a \frac{E^2}{2} dV = \int_V \mu_a \frac{H^2}{2} dV, \quad (6.11)$$

где E и H – амплитудные значения напряженности электрического и магнитного полей; интегрирование ведется по объему резонатора.

В частности, для колебаний типов H_{101} , H_{011} , E_{110} в прямоугольном объемном резонаторе

$$W = \frac{1}{8} \varepsilon_a E_{max}^2 abl, \quad (6.12)$$

где E_{max} – максимальная амплитуда напряженности электрического поля в резонаторе.

6.2 Пример решения типовых задач

Цилиндрический резонатор диаметром 6 см. и длиной 5 см. заполнен диэлектриком с параметрами $\varepsilon = 2,5$, $\text{tg} \delta_p = 2 \cdot 10^{-4}$. Материал стенок – медь.

Какой тип колебаний в резонаторе является основным? Найти резонансную частоту, добротность и полосу пропускания резонатора на этом типе колебаний.

Решение: Основным колебанием типа E в цилиндрическом резонаторе является E_{010} с резонансной частотой.

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} = \sqrt{\left(\frac{2,405}{a}\right)^2}.$$

Основным колебанием типа H – H_{111} с резонансной частотой

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{1,841}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\left(\frac{2,405}{a}\right)^2 < \left(\frac{1,841}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

Поэтому основным является колебание типа E_{010} , для которого

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \frac{2,405}{a} = 1,52 \cdot 10^1 \text{ рад/с},$$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 2,42 \text{ ГГц}$$

Рассчитав добротность по формулам (10.26) и (10.30), получим $Q=3680$.
Полоса пропускания резонатора

$$2 \Delta\omega = \omega_p / Q = 4,13 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$$

или

$$2 \Delta f = 658 \text{ кГц}$$

6.3 Задание

6.3.1 Определить резонансную длину волны основного типа колебания в кубическом резонаторе со сторонами 2 см.

Ответ: 1,414 см.

6.3.2 Определить резонансные частоты колебаний типов E_{010} и H_{111} в цилиндрическом резонаторе, диаметр и длина которого одинаковы и равны 5 см.

Ответ: 4,593 и 4,622 ГГц соответственно.

6.3.3 Какой тип колебаний является основным в прямоугольном резонаторе с размерами $a=2$ см, $b=4$ см, $l=3$ см? Определить его резонансную частоту. Какой тип колебаний является ближайшим высшим? Найти его резонансную частоту.

Ответ: H_{011} , 6,25 ГГц; E_{110} , 8,38 ГГц.

6.3.4 Определить размеры кубического резонатора, низшая резонансная частота которого равна 5 ГГц.

Ответ: 4,243 см.

6.3.5 Перестраиваемый резонатор образован отрезком прямоугольного волновода сечением 23 x 10 мм, внутри которого перемещается поршень. Определить пределы перемещения поршня для перестройки резонатора в пределах 8-12 ГГц. Тип колебания H_{101} .

Ответ: $14,89 \text{ мм} \leq l \leq 32,37 \text{ мм}$.

6.3.6 При каком отношении длины цилиндрического объемного резонатора к его радиусу резонансные частоты колебаний типов E_{010} и H_{111} будут одинаковыми?

Ответ: $l/a = 2,03$.

6.3.7 Прямоугольный объемный резонатор имеет следующие размеры: $a = 20 \text{ мм}$, $b = 25 \text{ мм}$, $l = 30 \text{ мм}$. Определить резонансную длину волны двух низших типов колебаний. Как они обозначаются?

Ответ: H_{011} , H_{101} .

6.3.8 Определить предельную энергию, которая может быть накоплена в коаксиальном резонаторе (см. рисунок 6.1) с размерами $d = 10 \text{ мм}$, $D = 40 \text{ мм}$ $l = 80 \text{ мм}$ на основном типе колебаний. Максимально допустимая напряженность электрического поля 30 кВ/см .

Ответ: $W = 0,3466 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$.

Список литературы

1. Пименов Ю.В. и др. Техническая электродинамика. - М.:Связь, 2006.
2. Петров Б.М. и др. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов - М.: Горячая линия - Телеком, 2003.
3. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высш.школа, 2004.
4. Куликов А.А. Хорош А.Х. Теория передачи электромагнитных волн. Конспект лекций. АУЭС. - Алматы 2009.
5. Баскаков С.И. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн». – М.: Высш.школа, 2004.

Содержание

1 Элементы векторного анализа	4
2 Статические и стационарные электромагнитные поле	9
3 Плоские электромагнитные волны	13
4 Отражение и преломление плоских электромагнитных волн	19
5 Волноводы	24
6 Объемный резонатор	29
Список литературы	36

Накисбекова Балауса Рыскожаевна
Суйеубаев Олжас Билалович

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Сборник задач для студентов специальности
5В071900 – Радиотехника, электроника и телекоммуникации

Редактор Л.Т. Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать ____ . ____ . ____ .
Тираж 100 экз
Объем 2,3 уч.-изд. л.

Формат 60x84 1/16
Бумага типографская №1
Заказ ____ . Цена 1150 т.

Копировально-множительное бюро
Некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126